

מתמטיקה ב



תוכן העניינים

1	1. משוואות אלגבריות
23	2. אי שוויונים אלגבריים
39	3. סדרות
63	4. מבוא לאלגברה
109	5. בעיות מילוליות

מתמטיקה ב

פרק 1 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה..... 1
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה..... 3
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון..... 6
4. משוואה ממעלה שנייה..... 7
5. משוואות דו-ריבועיות..... 9
6. משוואות עם פרמטרים..... 11
7. משוואות עם שורשים..... 13
8. משוואות עם ערך מוחלט..... 15
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה..... 16
10. משוואות מתקדמות מסכמות..... 18
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית..... 21

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$ ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$ ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$ ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$ ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$ ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
---	---

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$ ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$ ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$ ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
--	---

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$ | ב. $x=0$ | ג. $x=8$ | ד. $x=2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=-3$ |
| ז. $x=\frac{1}{2}$ | ח. $x=4$ | | | | |
| א. $x=3$ | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$ | ה. $x=4$ | ו. $x=-1$ |
| א. $x=-18$ | ב. $x=-30$ | ג. $x=-1$ | ד. $x=1$ | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$ |
| א. $x=8$ | ב. $x=-1$ | ג. $x=-3$ | ד. $x=-2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$ | ב. $x=-7$ | ג. $x=-7$ | ד. $x=6, x \neq 3$ | | |

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

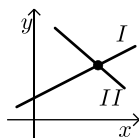
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

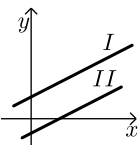
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



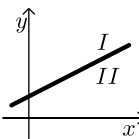
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:

נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases}$.ג.	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$.ו.	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases}$.ה.	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$.ד.

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}$.ד.	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases}$.ג.

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$.א.
--	---

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$ ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ ג. $x = \frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.
- (2) א. $x_1 = 2, x_2 = -1$ ב. $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$ ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$ ד. $x_1 = 0.6, x_2 = -2$
- (3) א. $x = \pm 6$ ב. $x = \pm \frac{3}{4}$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = \pm 1$
- (4) א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$ ג. $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$ ד. $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$
- (5) א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$ ד. $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

(1) $x = \pm 1$

(2) $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3) $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4) $x = \pm 2, \pm 5$

(5) $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6) $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7) $x = 49$

(8) $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9) $x = 5, -1$

(10) $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11) $x = -1$

(12) $x_{1,2} = 1, 3$

(13) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14) $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16) $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17) $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18) $x = -1, 2$

(19) $x = 3, -1$

(20) $x = \pm 1, 4, 6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

תשובות סופיות:

$x = -\frac{7}{3}, -7$ (1)	$x = 6, 12$ (2)	$x = 3$ (3)	$x = 6$ (4)
$x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5)	$x = 24, \frac{4}{5}$ (6)	$x = \pm 7$ (7)	$x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8)
$x = 0, -12$ (9)	$x = 0$ (10)		

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (1) $(2,4), (4,2)$
- (2) $(\pm 4, -2)$
- (3) $(\pm 2, \pm 1)$
- (4) $(5, -2), (-5, 2)$
- (5) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6) $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7) $(7, 4)$
- (8) $(5, -3)$
- (9) $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12) $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13) $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14) $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \\
 (2) & x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \\
 (3) & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \\
 (4) & 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \\
 (5) & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \\
 (6) & x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \\
 (7) & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \\
 (8) & \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \\
 (9) & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
 (10) & \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} \\
 (11) & \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \\
 (12) & \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$\begin{array}{ll}
 (13) & x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \\
 (14) & x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (15) & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 \\
 (16) & |4 - |5 - x|| = |x + 3| \\
 (17) & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \\
 (18) & \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \\
 (19) & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0
 \end{array}$$

$$(20) \quad \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2$$

תשובות סופיות:

$$x = 3 \quad (1)$$

$$x_1 = 4, x_2 = -9 \quad (2)$$

$$x_1 = 0.5, x_2 = -4.5 \quad (3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4 \quad (4)$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad (6)$$

$$. x = 1 \quad (7)$$

$$. x = 3 \quad (8)$$

$$. x = 2 \quad (9)$$

$$. 3.5 \leq x \leq 7 \quad (10)$$

$$. x = 4 \quad (11)$$

$$. x = 1, x = \frac{9}{16} \quad (12)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = a \quad (13)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = 3a \quad (14)$$

$$. x \leq 0 \quad (15)$$

$$. x = -1 \quad (16)$$

$$. x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18} \quad (17)$$

$$. x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4} \quad (18)$$

$$. x = -\sqrt{5} \quad (19)$$

$$(20) \text{ שאלת הוכחה.}$$

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$(17) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(18) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2 y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$(10) \quad 8y^3 + 60y^2 + 150y + 125$$

$$(11) \quad (2y + 7)(4y^2 - 17y + 49)$$

$$(12) \quad (xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1)$$

$$(13) \quad 8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2)$$

$$(14) \quad \frac{x^2 - 4x + 16}{x}$$

$$(15) \quad x = \frac{1}{x}$$

$$(16) \quad x_{1,2,3} = -2, -1, 3$$

$$(17) \quad x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1$$

$$(18) \quad (-5, -6), (6, 5)$$

$$(1) \quad x^3 - 9x + 27x - 27$$

$$(2) \quad (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$(3) \quad (a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9)$$

$$(4) \quad 8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8)$$

$$(5) \quad \frac{1}{x + 2}$$

$$(6) \quad x = 4$$

$$(7) \quad x = 3$$

$$(8) \quad x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2$$

$$(9) \quad (3, 6), (6, 3)$$

מתמטיקה ב

פרק 2 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

23	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
25	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
26	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
27	4. אי שוויונים עם מנה
29	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
30	6. שאלות מסכמות
32	7. אי שוויונים עם שורשים
34	8. מציאת תחום הגדרה
36	9. אי שוויונים עם ערך מוחלט

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $6x > 2(3x - 1)$ (2) | $45x - 26 > 109$ (1) |
| $(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20$ (4) | $2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6)$ (3) |
| $4(6x - 8) < 8(3x - 4)$ (6) | $\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3}$ (5) |
| $\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x$ (7) |

תשובות סופיות:

(1) $x > 3$

(2) כל x

(3) אף x

(4) $x > -2$

(5) $x < 5$

(6) אף x

(7) $x \geq 12$

(8) $x > -13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ | (2) $x(x^2 + x + 1) > 0$ |
| (3) $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ | (4) $x^3 - 25x \geq 0$ |
| (5) $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$ | (6) $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$ |
| (7) $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$ | (8) $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ |
| (9) $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ | (10) $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|----------------------------------|
| (1) $1 < x < 2, x > 3$ | (2) $x > 0$ |
| (3) $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ | (4) $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ |
| (5) $x > 2$ | (6) $x \leq 1\frac{2}{3}$ |
| (7) $x < -2, 1 < x < 3$ | (8) $x \leq 0, x = 3$ |
| (9) $x > -3$ | (10) $x < 1, 2 < x < 4$ |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$x < -2, 1 < x < 4 \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

תשובות סופיות:

(1) $-3 \leq x < 46$

(2) $x \geq 3$

(3) $x < -10, x > 1$

(4) $\emptyset$

(5) $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6) $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7) $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8) $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9) $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10) $-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$ שזה: $-2.618 < x \leq 1$

(11) $2.5 \leq x < 3$

(12) $x < -9, x > 0$

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$ x < a$	$ x > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג. $|x^2-3x| < 4$ ד. $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה. $x^2-6|x|+5 \leq 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $1 \leq \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 2$

א. $\left| \frac{3x-1}{x-2} \right| \geq 3$

ד. $\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right| > 5$

ג. $\frac{|x-6| + 8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$ ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$
- (2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $x < 2$ או $4 < x$
 ג. $-1 < x < 4$ ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$ ו. $x < -5$, $x > 7$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$ ב. $-1 < x < 1$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$ ד. $x < -1$ או $4 < x$
 ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$ ו. $-2 < x < 6$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$ ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$ ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$ ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

מתמטיקה ב

פרק 3 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית	(ללא ספר)
2. סדרה חשבונית	39
3. סדרה הנדסית	46
4. סדרות מעורבות	51
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	53
6. סדרת נסיגה	59

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$$

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- (8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
א. הוכח: $a_5 = 0$.
ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d .
ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

- (12) נתונה הסדרה החשבונית : $5, -1, -7, -13, \dots$. כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14) נתונה הסדרה החשבונית : $63, -67, -71, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases} \quad \text{נתונים שני טורים חשבוניים:}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

(22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd = 60$.

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

(25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x .

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

(26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים

העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.

האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1 = -4d$.

ii. $S_9 = 0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

מצא את a_1 ואת d .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא 504.

(27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66

מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd = 66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים

הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן

ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

(28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה :

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה :

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים

שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$
- (2) $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8) $x = 4, x = 1$
- (9) $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11) $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
- (18) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
- (19) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (20) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
- (21) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים: $S = 99$ זוגיים: $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i. $x = -50$ ii. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 נח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

שאלות:

$$(1) \quad \text{נתונה הסדרה ההנדסית: } \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

$$(2) \quad \text{מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: } \frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$$

$$(3) \quad \text{בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.}$$

$$(4) \quad \text{בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.}$$

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40,
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

(14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x .

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.

מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

(15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, 4, 12, 36, \dots, a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n

ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

(16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

(18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

(19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

(21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

- ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

(1) $a_9 = 729$

(2) $n = 7$

(3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7) $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8) $a_8 = 384$

(9) $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

(12) $q = 2$

(13) $n = 6$

(14) א. $x = 14$ ב. i. $a_n = 5^{n-1}$ ב. ii. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$

(15) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6

(16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$

(17) $q = 4$

(18) $\frac{q+1}{q}$

(19) $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6

(21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$

(22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג. $2^{24}, 4, 16, 64, \dots, 22,369,620$ $S_n =$

סדרות מעורבות:

שאלות:

- (1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3. אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.
- (2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתייהן 3 איברים. סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- (3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.
- (4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה. האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.
ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.
- (5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ וסדרה הנדסית: $b_1, b_2, b_3, \dots$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) המספרים הם: 2, 6, 18.
- (2) $q = -1$ או $q = 3$.
- (3) המספרים הם: 3, 6, 7.5, 12.
- (4) א. 8, 10, 12 ב. 5 ג. 6.
- (5) א. $q = -2$ ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

• הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

• נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

• סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$, מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1 = a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$d_1 = S_a + a_1$
	$b_2 = a_1 + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$d_2 = S_a + a_2$
	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$d_3 = S_a + a_3$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$d_n = S_a + a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

(6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q .

מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 - ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
 - מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
 - הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 - הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 - סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.
- נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$. נתון כי: $T = 6V$.
 - מצא את מנת הסדרה q .
 - פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 - מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
- בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
 - הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 - בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 - מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
 - ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- 11** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
 נתון כי: $V = 0.3T$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$S = 18 \quad (1)$$

$$a_1 = 24 \quad (2)$$

$$q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה } c_n \text{ הנדסית}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2. \text{ ב. } \text{היות והיא תלויה ב-} n \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

$$b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad \text{א.} \quad a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ד. } 31.5 \quad (6)$$

$$\text{ה. } 94.5 \quad \text{ו. } -63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ח. } 7938$$

$$S^2 : \text{משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

$$S_{(s)} : \text{משמעו: } b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots \text{ ברור כי הביטויים אינם שווים.}$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. } q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad (7)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{א. } q = 0.6 \quad \text{ב. } a_1 = 200 \quad (8)$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \text{ב. פי 5} \quad \text{ג. } a_1 = 1024 \quad (9)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. } q = 0.5 \quad \text{ג. } a_5 = 20 \quad (10)$$

$$q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad \text{ב. } a_1 = -16 \quad \text{ג. } S = 288 \quad (11)$$

סדרת נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k .
 הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2 \\ &\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n \text{ באופן הבא: } b_n = a_{n+1} - a_n \\ &\text{א. הוכח שהסדרה } b_n \text{ היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.} \\ &\text{ב. חשב את } b_1. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} &\text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ &\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n \text{ באופן הבא: } b_n = a_n + 2 \\ &\text{א. הוכח שהסדרה } b_n \text{ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.} \\ &\text{ב. נתון: } b_5 = 162. \text{ חשב את } a_1. \end{aligned}$$

(6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5 .

ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

(7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.

א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

(8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.

(9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

10 סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא : $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות

ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא : $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.

חשב את הסכום הבא : $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה : $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי : $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא : $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } a_3 = -22 \quad \text{ב. } a_{12} = 5, a_{14} = 33 \quad \text{ג. } a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51 \quad (1)$$

$$\text{ד. } a_{62}, a_{63}$$

$$a_{k+2} = 74 + 4k \quad (2)$$

$$t = -33 \quad (3)$$

$$\text{א. } d = 6 \quad \text{ב. } b_1 = 4 \quad (4)$$

$$\text{א. } q = 3 \quad \text{ב. } a_1 = 0 \quad (5)$$

$$\text{א. } b_{n+1} = 3b_n \quad \text{ב. } b_5 = 648 \quad \text{ג. } S = 1594320 \quad (6)$$

$$\text{א. } a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k \quad \text{ב. } 8 \quad (7)$$

$$\text{ג. } 830$$

$$\text{ב. } S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3} \quad (8)$$

$$\text{א. } a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7 \quad \text{ג. } S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n \quad (9)$$

$$\text{ד. } S_{9(o)} = 117$$

$$\text{ii. } a_4$$

$$\text{א. } a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4 \quad \text{i. } (10)$$

$$\text{ג. } a_1 = 5$$

$$\text{ב. } S_{6-11} = 265458$$

$$\text{ג. } S_{10}^* = -4086.74$$

$$\text{ב. } b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$$

$$\text{א. } q = 2.5 \quad (11)$$

מתמטיקה ב

פרק 4 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

63	1. מספרים מכוונים
67	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
69	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
70	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
76	5. כפל וחילוק שברים
78	6. חיבור וחסור שברים
82	7. בעיות יסודיות באחוזים
84	8. חזרה על תבניות מספר
86	9. כינוס איברים
88	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
90	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
92	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
95	13. פירוק הטרינום
97	14. שברים אלגברים
101	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
103	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
107	17. שברים כפולים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

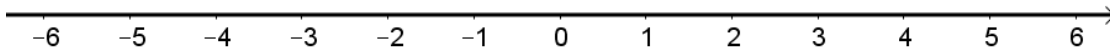
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30):3$

א. $(-25):(-5)$

ד. $(-32):(-4)$

ג. $40:(-10)$

ו. $4:(-16)$

ה. $(-6):18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0:5$

ד. $6:0$

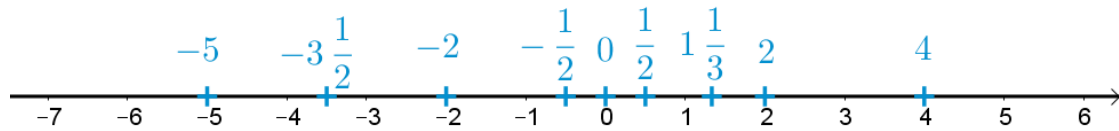
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0-4$

ה. $0+4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



	ה. -5	ד. -1	ג. 1	ב. -5	א. 5 (2)
			ח. -4	ז. -1	ו. 17
ו. -18	ה. -19	ד. -4	ג. -3	ב. 2	א. -10 (3)
	ה. -16	ד. 15	ג. 30	ב. -28	א. 36 (4)
	י. 18	ט. 18	ח. 18	ז. -18	ו. -40
		יד. 16	יג. -16	יב. 36	יא. -18
		ד. -	ג. -	ב. +	א. + (5)
ו. $-\frac{1}{4}$	ה. $-\frac{1}{3}$	ד. 8	ג. -4	ב. -10	א. 5 (6)
		ד. 4	ג. -8	ב. -7	א. -5 (7)
ו. -4	ה. 4	ד. לא מוגדר	ג. 0	ב. 0	א. 0 (8)

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 & \text{(1)} \\
 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} & \text{(2)} \\
 -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 & \text{(3)} \\
 \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 & \text{(4)} \\
 (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243}) & \text{(5)} \\
 (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 & \text{(6)} \\
 [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 & \text{(7)} \\
 \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} & \text{(8)} \\
 \text{(9)} & \text{(10)} \\
 \text{(11)} & \text{(12)}
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

28 (1)	33 (2)	19 (3)	-37 (4)
31 (5)	-14 (6)	5 (7)	-21 (8)
-16 (9)	-44 (10)	20 (11)	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

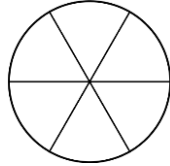
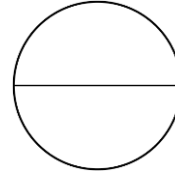
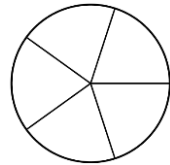
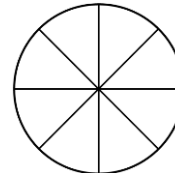
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

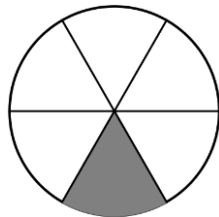
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

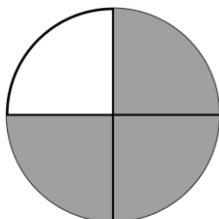
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

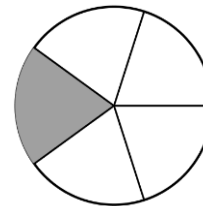
ב. שבר:



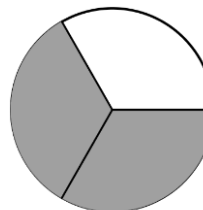
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.8\bar{3} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.1\bar{8}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

(12 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = \frac{-7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $2 - \frac{5}{6}$

א. $2 + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12. ו.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$. ו.	$\frac{1}{2}$. ה.	$1\frac{3}{4}$. ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$. ב.	$\frac{4}{5}$. א. (2
		$\frac{3}{5}$. י.	$1\frac{5}{8}$. ט.	$-\frac{4}{5}$. ח.	$-\frac{1}{4}$. ז.
$3\frac{5}{6}$. ו.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$. ד.	$\frac{7}{12}$. ג.	$\frac{7}{10}$. ב.	$1\frac{5}{6}$. א. (3
				$-\frac{1}{10}$. ח.	$\frac{19}{21}$. ז.
$-\frac{5}{8}$. ו.	$7\frac{11}{12}$. ה.	$1\frac{5}{12}$. ד.	$3\frac{1}{12}$. ג.	$1\frac{1}{6}$. ב.	$2\frac{5}{6}$. א. (4
				$-\frac{1}{20}$. ח.	$2\frac{13}{18}$. ז.
	$3\frac{5}{18}$. ה.	$2\frac{5}{6}$. ד.	$-13\frac{3}{4}$. ג.	$1\frac{1}{10}$. ב.	$2\frac{11}{24}$. א. (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגדים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

(7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----|----------------|-------------|
| (1) | א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| (2) | א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| (3) | א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| (4) | א. 540 ₪ | ב. 40 ₪ |
| (5) | 4.9755 ₪ | |
| (6) | 400 ₪ | |
| (7) | א. 88% | ב. 60% |
| | ג. 50% | ד. 33.33% |
| | ה. 33.33% | ו. 25% |

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$ | ב. x^2+3x כאשר $x=2$ |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$ |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.
- ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

א. $a^2 + 2ab + b^2$	עבור : $a = 3, b = -5$
ב. $(x - 3)^2 + 3x^2b$	עבור : $x = 5, b = -1$
ג. $-x^3 - 2xy + y^4$	עבור : $x = -2, y = -1$
ד. $\frac{(a - 2c)^4}{a} - a^2$	עבור : $a = 2, c = -2$
ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$	עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$
ו. $\sqrt{c - 3a}$	עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$
ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$	עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$

תשובות סופיות:

(1)	א. 11	ב. 10	ג. -12	ד. -65	ה. -7	ו. 5
	ז. -10	ח. 45				
(2)	א. $\frac{10}{27}$	ב. $5\frac{22}{27}$				
(3)	א. 4	ב. -71	ג. 5	ד. 644	ה. $\frac{1}{2}$	
				ז. -37		
	ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9					

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27) |
| | | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 (4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- (5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$ | ב. $x^2 - 8x + 15$ | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$ |
| ז. $2x^2 + x - 6$ | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$ |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$ | ב. $x^2 + 5x + 4$ |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$
- ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$
- ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.
- (2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$	ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$
ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$	ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$
ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$	ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$	ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$
ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$	ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$
ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$	ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$
ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$	ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$
ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$	י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$	ו. $\frac{1}{3}$		

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1
- (2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד. $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$ | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$ |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$ |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$ | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$ |
| $\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20} \quad (8)$ | $\frac{3-y}{3c^2} \quad (7)$ |
| $\frac{\frac{16t+8}{25-t^2}}{2t+1}$ | $\frac{\frac{3c^3-9c^2-12c}{40}}{15c+15} \quad (9)$ |
| | $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)}$ |
| | $\frac{5x+5}{5x+5}$ |

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

מתמטיקה ב

פרק 5 - בעיות מילוליות

תוכן העניינים

109	1. בעיות תנועה ללא אחוזים
112	2. בעיות תנועה עם אחוזים
113	3. בעיות תנועה עם משפט פיתגורס
114	4. בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים
115	5. בעיות תנועה מהירות ממוצעת
116	6. בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים
117	7. בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים
118	8. בעיות קנייה ומכירה שונות
124	9. בעיות יסודיות במרובעים
126	10. בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס
128	11. בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס
129	12. בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס
130	13. בעיה במעגל – כולל אחוזים
131	14. בעיות בהנדסת המרחב

בעיות תנועה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

שאלות:

- (1) מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש. בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.
 - א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?
 - ב. מהי הדרך שעברה המכונית?
- (2) אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה. מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש. האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.
 - א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?
 - ב. מהו המרחק בין שתי הערים?
- (3) הולכת רגל יצאה לטיול במהירות מסוימת. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה ממהירותה ב-4.5 קמ"ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.
 - א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?
 - ב. מהו המרחק שעברו עד שנפגשו?
- (4) שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2 קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.
 - א. באיזו מהירות נסע הרוכב הראשון?
 - ב. איזו דרך עבר הרוכב השני בכל חלק?

- (5) משאית נוסעת מרחק של 245 ק"מ בכל יום במהירות קבועה. יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני השעה שהיא מגיעה בכל יום.
- א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?
ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?
- (6) אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה ב-800 ק"מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרעננות במשך חצי שעה. לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב'.
- סך כל הזמן שהיה האוטובוס בדרך הוא 7 שעות.
- א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?
ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרעננות עד לעיר ב'?
- (7) רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש. באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?
- (8) המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?
- (9) משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית.
- מצא את מהירות המכונית.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8 שעות הלוך ו-12 שעות חזור. ב. 1440 ק"מ.
- (2) א. אוטובוס-6 שעות ו-40 דקות, משאית-5 שעות. ב. 400 ק"מ.
- (3) א. 3 קמ"ש. ב. 7.5 קמ"ש.
- (4) א. 12 קמ"ש. ב. 20 ק"מ ו-40 ק"מ.
- (5) א. 50 קמ"ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.
- (6) א. 90 קמ"ש. ב. 665 ק"מ.
- (7) 30, 8: 60 קמ"ש.
- (8) 8: 50.
- (9) 80 קמ"ש.

בעיות תנועה עם אחוזים:

שאלות:

10 מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה. בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרעננות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?

11 רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מעיר א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ. מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא. רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה, ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'. עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא.
א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות?
ב. מה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?

12 מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית.
א. מהי מהירות המכונית?
ב. מהו המרחק בין נקודה A לנקודה B?

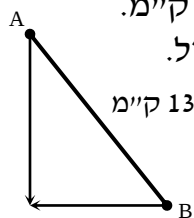
תשובות סופיות:

- 10** 80 קמ"ש.
11 א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש. ב. 5 שעות.
12 א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.

בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

שאלות:

- 13) שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון. לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ. מהירות מכונית אחת גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה. א. מהן המהירויות של שתי המכוניות? ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?



- 14) שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ. היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול. הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מערבה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני. באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?

- 15) רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה. לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת. לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו. א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסה"כ 150 ק"מ. ב. מה הייתה הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?

תשובות סופיות:

- 13) א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.
 14) א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.
 15) א. 50 קמ"ש. ב. 60 קמ"ש.

בעיות תנועה מהירות מושפעת מזרמים:

שאלות:

- 16) סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ"ש עם כיוון זרם המים. לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעהיים לנקודת המוצא שלהם. מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השיט. א. מצא את מהירות הסירה. ב. מהו המרחק הכולל ששטה הסירה?

תשובות סופיות:

- 16) א. 5 קמ"ש. ב. 8 קמ"ש.

בעיות תנועה מהירות ממוצעת:

שאלות:

17) מכונית נוסעת 3 שעות במהירות קבועה של 140 קמ"ש ולאחר מכן במשך שתיים נוספות במהירות קבועה של 100 קמ"ש.

א. מה סך הדרך שעברה המכונית?

ב. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

18) מכונית נוסעת 4 שעות במהירות של 130 קמ"ש ולאחר מכן מספר שעות נוספות במהירות של 70 קמ"ש.

ידוע כי מהירותה הממוצעת היא 110 קמ"ש.

כמה שעות נסעה המכונית במהירות של 70 קמ"ש?

19) אופנוע עובר מרחק של 200 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%.

הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק"מ.

המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ"ש.

א. כמה זמן נסע האופנוע?

ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

תשובות סופיות:

17) א. 620 ק"מ. ב. 125 קמ"ש.

18) שתיים.

19) א. 5 שעות. ב. 80 קמ"ש.

בעיות קנייה ומכירה בלי אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

שאלות:

- (1) מחיר כניסה למוזיאון המדע למבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה לילד. יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם בעבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים. מה המחיר לילד ומה המחיר למבוגר?
- (2) המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים. שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים. מה המחיר של ק"ג מכל סוג?
- (3) דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים. אם ירד המחיר למחברת ב-10 שקלים יוכל דן לקנות 40 מחברות יותר מאשר קנה בתחילה באותו הסכום. כמה מחברות קנה דן ומה המחיר של כל מחברת?
- (4) סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?

תשובות סופיות:

- (1) 20 ₪ ו-35 ₪.
- (2) 7 ₪ ו-9 ₪.
- (3) 16 ב-14 ₪.
- (4) 50 ₪.

בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

שאלות:

- (5) משכורתו של אלון גדולה ב-200 ₪ ממשכורתו של רן. אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 ₪. מהי המשכורת של כל אחד מהם?
- (6) עקב ביקוש רב מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪.
א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי?
ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?
- (7) המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20%, אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.
א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?
- (8) סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪.
א. כמה שולחנות קנה הסוחר?
ב. מה המחיר ששילם הסוחר עבור כל שולחן?

תשובות סופיות:

- (5) א. 1,400 ₪. ב. 94.5%.
- (6) א. 100 ₪. ב. 144 ₪.
- (7) א. 60 שולחנות. ב. 300 ₪.
- (8) א. 250 מרצפות. ב. 88 ₪. ג. 156,000.

בעיות קנייה ומכירה שונות:

שאלות:

(9) קבלן רכש x מרצפות רצפה בסכום כולל של 22,000 ₪. 20 מרצפות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. את שאר המרצפות מכר הקבלן ברווח של 50%. סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 8,360 ₪.

- א. כמה מרצפות קנה הקבלן?
 ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל מרצפה?

(10) שמואל קנה מחשב ומדפסת במכרז ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪. לאחר חודש ימים, מכר שמואל את המדפסת בהפסד של 10% ואת המחשב ברווח של 40%. ידוע כי שמואל מכר את שני המוצרים במחיר כולל של 4,740 ₪. בכמה כסף קנה שמואל את המחשב ובכמה כסף קנה את המדפסת?

(11) חוואי קנה 15 סוסי פוני במחיר זהה לסוס. לאחר שנה מכר החוואי 3 סוסים ברווח של 35%, שניים מתו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.

- א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס פוני?
 ב. אם רק סוס אחד היה מת, האם היה החוואי מרוויח מהעסקה?
 אם לא נמק, אם כן בכמה היה מרוויח?

(12) מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ושנה לאחר מכן עלה מחירה בעוד 20%.

- א. מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים?
 ב. בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?
 ג. בחנות למוצרי חשמל מוכרים מכונות כביסה במחיר מסוים. רפי קנה 3 מכונות כביסה למכבסה שברשותו. ידוע כי לאחר שנה חלה התייקרות ב- p אחוזים וכך גם בשנה שאחריה. בתום השנתיים, החליט רפי לקנות 2 מכונות כביסה נוספות. מבדיקה שערך רפי, גילה כי המחיר הכולל ששילם בקנייה השנייה שווה למחיר ששילם בקנייה הראשונה. מהו p ?

- 13** המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%.
 כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.
 א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
 ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?
 ג. אכסניית נוער מעוניינת לרכוש שמיכות וכריות עבור מיטות יחיד למספר חדרים (מספר זהה של שמיכות וכריות).
 האם כדאי להנהלת האכסניה לרכוש את השמיכות והכריות במחירים המקוריים או לאחר שנה? נמק.
- 14** המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כיסא.
 לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכיסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כיסא אחד.
 א. מה המחיר של כיסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?
 ב. בכמה אחוזים גדול המחיר של הכיסא לאחר ההוזלה מהמחיר של השרפרף לאחר ההתייקרות?
 ג. לרשות בית ספר תקציב מסוים המיועד לרכישת כיסאות ושרפרפים. ידוע כי בית הספר מעוניין לרכוש פי 4 יותר שרפרפים מאשר כיסאות. האם כדאי לבית הספר לבצע את הרכישה במחירים המקוריים או לאחר השינויים אם ברצונו לרכוש יותר פריטים?
- 15** סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכיסא. 5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם.
 בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.
 א. באיזה מחיר קנה הסוחר כל כיסא?
 ב. בעסקה אחרת, קנה הסוחר 60 כיסאות אחרים במחיר זהה לכיסא. ידוע כי המחיר של כיסא בודד גדול ב-30% מהמחיר של כיסא בודד שרכש הסוחר בעסקה הראשונה. במהלך ההובלה נגנבו 8 כיסאות. הסוחר רוצה להרוויח ממכירת הכיסאות הנותרים לפחות 2000 ₪ בעסקה זו. נסמן ב- p את אחוז ההתייקרות שבו צריך למכור הסוחר כיסא בודד. מצא את p המינימלי עבורו יעמוד הסוחר ביעדו.

16 סוכן של חברת רהיטים קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪. רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 4.80% מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה. בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪.

א. כמה מיטות קנה הסוכן?

ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?

ג. בהנחה שהסוכן רוכש עבור החברה פעם נוספת כמות מיטות זהה ממקום אחר, ומוכר באותם התנאים, כמה עליו לשלם עבור מיטה בודדת כדי שהרווח שלו יהיה לפחות 10,000 ₪? (עגל את תשובתך לשקלים שלמים).

17 יצרנית מוצרי חשמל מוכרת מקררים במחיר של x ₪ ליחידה. עם השקת מקרר חדש הוחלט להעלות את מחירו ב-5% עקב הביקוש הרב. בשנה הראשונה להשקתו נקנו מספר מקררים. שנה לאחר מכן ירד הביקוש ולכן מחיר המקרר הוזל ב-10% (ביחס למחירו בשנה הראשונה). כעת נמכרו מספר כפול של יחידות ביחס לשנה הקודמת.

א. מצא את המחיר המקורי של מקרר אם ידוע כי סך כל הרווחים של יצרנית המקרר בשנתיים הנ"ל זהה לסכום שהייתה מרוויחה אם היו קונים את אותו מספר המקררים שנרכשו בשנה הראשונה במחיר של 4116 ₪ ליחידה.

ב. היצרנית הרוויחה בשנה השנייה 235,200 ₪ יותר מאשר בשנה הראשונה. מצא כמה מקררים נמכרו בשנה הראשונה.

18 בחנות מסוימת, מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות. לאחר חודש התייקר הכובע ב-50% והכפפות הוזלו ב- p אחוזים.

א. מצא את p עבורו קנייה של 16 כובעים ו-2 זוגות כפפות לפני השינויים תשתווה לקנייה של 4 כובעים ו-20 זוגות כפפות לאחר השינויים.

ב. מצא את p עבורו ההפרש בין קניית 5 כובעים ו-4 זוגות כפפות במחירים לאחר השינויים, לבין קניית 3 כובעים ו-2 זוגות כפפות במחירים המקוריים יהיה שווה למחיר של קניית 5 זוגות כפפות במחירם המקורי.

ג. מצא את p עבורו המחיר של כובע אחד ו-10 זוגות כפפות לאחר השינויים יהווה 80% מהמחיר של קניית אותם הפריטים במחירים המקוריים.

19 סוחר רוכש מנורות בסכום כולל של 4,000 ₪. 26 מהמנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ למנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ למנורה. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪.

- א. כמה מנורות קנה הסוחר ברכישה הראשונה ובאיזה מחיר למנורה?
- ב. בעסקה אחרת רכש הסוחר כמות מנורות מסוימת בהנחה של 20% ביחס למחיר ששילם בתחילה. הסוחר מכר אותם לבית עסק ברווח של 50% למנורה. ידוע כי הרוויח הסוחר בעסקה 3200 ₪. כמה מנורות רכש הסוחר בעסקה השנייה?

20 סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.

- א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?
- ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?
- ג. התיקים שמכר הסוחר ברווח של 15% נקנו ע"י חנות מרכזית. בחודש הראשון למכירת התיקים, מכרה החנות כל תיק ברווח של 50%. לאחר חודש העלתה החנות את המחיר של תיק ב-20% נוספים ופרסמה מבצע שבמסגרתו כל הקונה שני תיקים יקבל את השני בהנחה של 40%. חן הגיעה לחנות בחודש הראשון וקנתה שני תיקים ואחותה, שרית, הגיעה לחנות לאחר חודש וקנתה שני תיקים במסגרת המבצע. מי משתי האחיות שילמה מחיר נמוך יותר בממוצע על תיק?

21 בית קפה רכש 120 ק"ג מוצרי שוקולד. 10 ק"ג נהרסו מיד עם הגעתם למקום עקב תנאי תחזוקה רעועים, 40 ק"ג נמכרו ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות מכר בית הקפה בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד בית הקפה בעסקה 60 ₪.

- א. מהו המחיר של ק"ג מוצרי שוקולד?
- ב. בהזמנה נוספת רכש בית הקפה כמות מסוימת של מוצרי שוקולד ושילם עבור ק"ג אחד את המחיר שמצאת שסעיף הקודם. ידוע כי 10% מהכמות מכר בית הקפה ברווח של 50% לק"ג ו-20% מהכמות מכר בית הקפה בהפסד של 25%. מצא באיזה מחיר צריך למכור בית הקפה את הכמות הנותרת על מנת שירוויח 70% מהסכום שהוציא.

(22) בעל מזנון פלאפל קנה 12 ק"ג גרגירי חומוס להכנת כדורי פלאפל ו-8 ק"ג קמח לאפיית פיתות. ידוע כי המחיר של 2 ק"ג גרגירי חומוס גבוה ב-2 ש"ח מהמחיר של 1 ק"ג קמח. בעל המזנון קיבל הנחה של 25% על כל 1 ק"ג גרגירי חומוס והנחה של 20% על כל 1 ק"ג קמח. לאחר ההנחה שילם בעל המזנון 74.4 ש"ח בעבור קנייתו.

- א. מה הם המחירים של 1 ק"ג גרגירי חומוס ו-1 ק"ג קמח?
- ב. ידוע כי כל מנת פלאפל נמכרת במחיר זהה ולהכנתה דרושים 300 גרם גרגירי חומוס ו- x גרם קמח.
- בעל המזנון ניצל בצורה מלאה את כל הרכיבים שברשותו ולאחר מכירת כל המנות שהכין נשאר עם רווח של 245.6 ש"ח.
- מצא את x ואת המחיר של מנת פלאפל.

(23) בעל גלידריה קנה 30 ליטרים חלב ו-18 ק"ג אבקת שוקולד להכנת גלידות שוקולד. על כל 1 ליטר חלב קיבל 5% הנחה ועל כל 1 ק"ג אבקה קיבל 10% הנחה. ידוע כי המחיר ששילם על כל כמות החלב שרכש גדולה ב-77.7 ש"ח מהמחיר ששילם על כל האבקה שרכש.

- א. מצא את המחיר של 1 ליטר חלב ו-1 ק"ג אבקת שוקולד אם ידוע כי הוא שילם 207.3 ש"ח בעבור כל הקנייה.
- ב. כדי לייצר כדור שוקולד אחד דרושים 300 מ"ל חלב ו-180 גרם אבקת שוקולד. בעל הגלידריה ניצל את כל המוצרים שקנה ופרסם כי המחיר של כדור שוקולד אחד הוא 10 ש"ח וכי בקניית שני כדורי שוקולד תינתן הנחה של שקל. בעל הגלידריה מכר את כל הכדורים שברשותו והרוויח 762.7 ש"ח.
- מצא כמה לקוחות קנו כדור בודד וכמה קנו שני כדורים.

(24) סוכן כלי כתיבה רכש בקנייה מרוכזת 40 חבילות עטים ו-60 חבילות עפרונות. חבילת עטים מכילה 12 עטים וחבילת עפרונות מכילה 10 עפרונות. הסוכן קיבל הנחה של 10% לעט ו-15% הנחה לעפרון. בסה"כ שילם הסוכן 3102 ש"ח. ידוע כי אילו לא היה מקבל הסוכן את ההנחות, אז המחיר הכולל שהיה נדרש לשלם עבור כל העטים היה גדול פי 4.8 מהמחיר שהיה משלם עבור כל העפרונות.

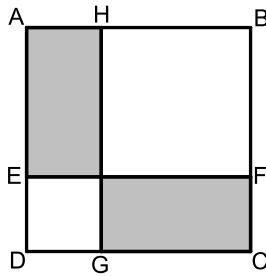
- א. מצא מה המחירים המקוריים של עט בודד ושל עפרון בודד.
- ב. חנות "כותבים בכיף" קנתה כמות מסוימת של עטים ועפרונות מהסוכן והכינה מארזים לתחילת שנה שכל אחד מכיל 2 עטים ו-3 עפרונות. הסוכן מכר לחנות את העפרונות והעטים במחירים המקוריים שלהם ואילו החנות מכרה את המארזים במחיר הגדול ב-40% מעלות ההכנה שלהם.
- מצא כמה עפרונות וכמה עטים רכשה החנות מהסוכן אם ידוע כי הרוויחה מעסקה זו (לאחר שמכרה את כל המארזים שהכינה) סה"כ 72 ש"ח.

תשובות סופיות:

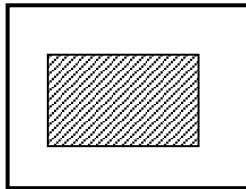
- (9) א. 250 מרצפות. ב. 88 ₪. ג. 156,000.
- (10) מחשב-3000 ₪, מדפסת-600 ₪.
- (11) א. 1800 ₪. ב. היה מרוויח 90 ₪.
- (12) א. 5760 ₪. ב. 44%. ג. 22.4%.
- (13) א. 100 ₪. ב. 144 ₪.
- ג. כדאי לקנות לאחר שנה, ללא תלות במספר החדרים.
- (14) א. 100 ו-20 ₪. ב. ב-200% (פי 3). ג. במחירים המקוריים.
- (15) א. 50 ₪. ב. 74.5%.
- (16) א. 12 מיטות. ב. 5,000 ₪.
- ג. המחיר המדויק הוא : 5263.15 ₪ ולכן נעגל ונדרוש : 5264 ₪ למיטה.
- (17) א. 1400 ₪ $x =$. ב. 200 יחידות.
- (18) א. 20%. ב. 82.5%. ג. 29.8%.
- (19) א. 50 נורות ב-80 ₪ למנורה. ב. 100 מנורות.
- (20) א. 40 ₪. ב. לא. ג. שרית (66.24 ₪).
- (21) א. 4 ₪. ב. 8 ₪.
- (22) א. 1 ק"ג גרגירי חומס-4 ₪, 1 ק"ג קמח-6 ₪. ב. 200 גרם $x =$, מנת פלאפל-8 ₪.
- (23) א. 1 ליטר חלב-5 ₪, 1 ק"ג אבקה-4 ₪. ב. 30 קנו שני כדורים ו-40 קנו כדור בודד.
- (24) א. עט-6 ₪, עפרון-1 ₪. ב. 12 מארזים ולכן 24 עטים ו-36 עפרונות.

בעיות יסודיות במרובעים:

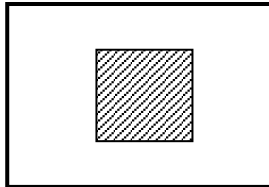
שאלות:



- (1) המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).
 הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע. הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.
 ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.
 מצא את אורך צלע הריבוע.

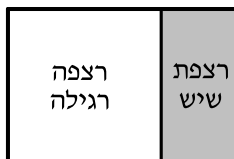


- (2) היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ. רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל הוא 10 קמ"ר.
 ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.
 מצא את מידות החלקה.



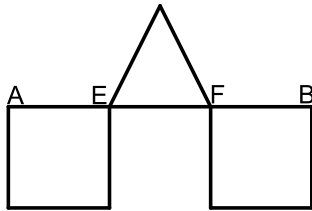
- (3) במרכז חלקה מלבנית שצלע אחת שלה גדולה ב-10 ק"מ מהצלע הסמוכה לה בונים בניין ריבועי (המקווקו באיור). ידוע כי אורך הצלע שלו היא שליש מאורך הצלע הקטנה של החלקה. מחיר קמ"ר אחד משטח הבניין הוא 1,000 ₪ ומחיר קמ"ר אחד משטח החלקה הוא 100 ₪.
 קבלן בניה שילם עבור כל השטח סכום כולל של 60,000 ₪.
 מצא את מידות החלקה.

- (4) לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12×18 מטרים. רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני. רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי).

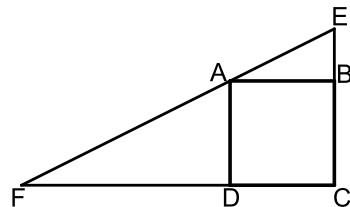


- ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60% מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית.
 רפי השקיע בריצוף המטבח סכום כולל של 3168 ₪.
 כמה עולה מ"ר מכל סוג?

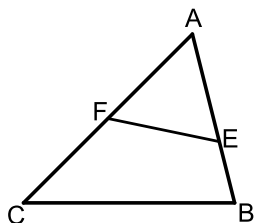
בעיות במרובעים ובמשולשים ללא משפט פיתגורס:



- (5) על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים EF, AE ו-BF שווים. על הקטעים AE ו-BF בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים. ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים והמשולש הוא 90 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.



- (6) נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה. הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EF. הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע. ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר. מצא את אורך צלע הריבוע.



- (7) הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC. ידוע כי שטח המשולש AEF הוא 22 סמ"ר. שטח המרובע BCFE מהווה 60% משטח המשולש ABC.
- מצא את שטח המרובע BCFE.
 - מצא את שטח המשולש ABC.

תשובות סופיות:

- 24 ס"מ.
- 10 ס"מ ו-5 ס"מ.
- 15 ק"מ ו-25 ק"מ.
- 20 נ"מ ו-12 נ"מ.
- 6 ס"מ.
- 6 ס"מ.
- א. $S = 33$ ב. $S = 55$

בעיות במשולשים כולל משפט פיתגורס:

שאלות:

8) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC המחלק אותו לשני משולשים ADC

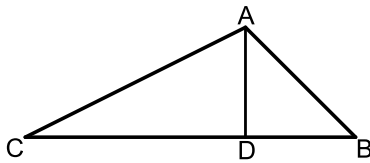
ו-ABD כך שמתקיים: $S_{ADC} = 2S_{ABD}$.

א. נתון שאורך הקטע BD הוא 12 ס"מ.

מצא את אורך הקטע CD.

ב. נתון שאורך הצלע AC הוא 25 ס"מ.

חשב את: S_{ABD} .



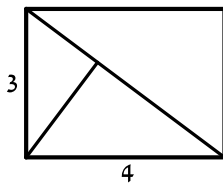
9) במלבן שצלעותיו הן 3 ו-4 ס"מ מעבירים אלכסון ומעלים לו גובה מהקדקוד התחתון לו.

א. מצא את אורך האלכסון.

ב. מצא את אורך הגובה.

ג. מצא את אורכי שני הקטעים

שהגובה מחלק את האלכסון.



10) במשולש ABC מורידים גובה AD לצלע BC כך שהקטע BD

גדול פי 4.5 מהקטע CD.

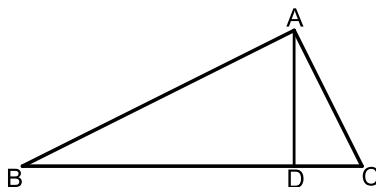
אורך הצלע AB הוא 13 ס"מ ואורך הצלע AC

הוא $5\frac{2}{3}$ ס"מ.

א. מצא את האורכים BD ו-CD.

ב. מצא את אורך הגובה AD.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



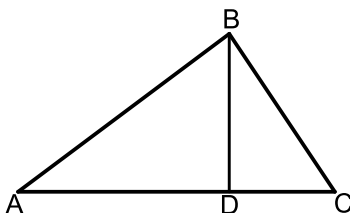
11) BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$).

היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB.

ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.

א. מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.

ב. מהם האורכים AD ו-DC?

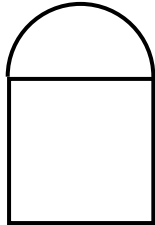


תשובות סופיות:

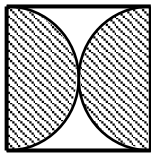
- (8) א. 24 ס"מ. ב. $S_{ABD} = 42$.
- (9) א. 5 ס"מ. ב. 2.4 ס"מ. ג. 3.2 ס"מ ו-1.8 ס"מ.
- (10) א. 12 ס"מ ו- $2\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 36\frac{2}{3}$.
- (11) א. 24 ס"מ ו-30 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ.

בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא משפט פיתגורס:

שאלות:



- 12** בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול. ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן. שטח החלון הכולל הוא : $200 + 12.5\pi$.
- א. מצא את מידות המלבן.
 ב. מצא את היקף החלון.



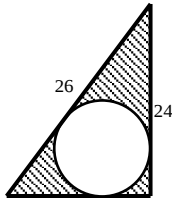
- 13** בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה. ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא 10π .
- א. מצא את אורך צלע הריבוע.
 ב. ענה על השאלות הבאות:
- i. מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).
 ii. מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

תשובות סופיות:

- 12** א. 10 ס"מ. ב. i. $S = 25\pi$. ii. $S = 100 - 25\pi = 21.4$.
- 13** א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 120 - 25\pi = 41.4$.

בעיה במעגל – ללא אחוזים וכולל משפט פיתגורס:

שאלות:



14) באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול. ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.

א. מצא את אורך הניצב השני.

ב. שטח המעגל הוא 25π . מצא את רדיוס המעגל.

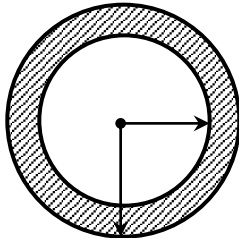
ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

תשובות סופיות:

14) א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 120 - 25\pi = 41.4$.

בעיה במעגל – כולל אחוזים:

שאלות:



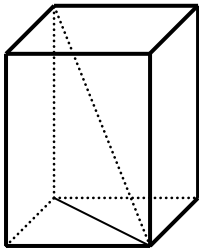
15) באיור שלפניך מתוארת טבעת המורכבת משני מעגלים בעלי אותו מרכז ששטחה הוא 63π . ידוע כי רדיוס המעגל הפנימי קטן ב-25% מרדיוס המעגל החיצוני. מצא את הרדיוסים של שני המעגלים.

תשובות סופיות:

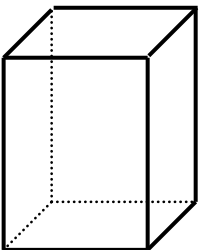
15) 12 ו-9.

בעיות בהנדסת המרחב:

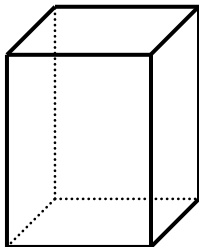
שאלות:



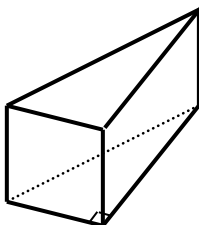
- (1) נתונה תיבה שבסיסה מלבן. ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קטנה ב-25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה. אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.
- מצא את מידות בסיס התיבה.
 - מצא את נפח התיבה.
 - חשב את אורך אלכסון התיבה.



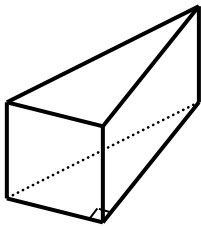
- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ. ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.
- מצא את מידות בסיס התיבה.
 - מה יהיה אורך אלכסון התיבה?



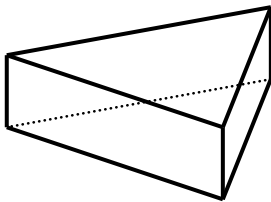
- (3) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. ידוע כי צלע אחת של המלבן גדולה ב-50% מהצלע הסמוכה לה. כמו כן גובה התיבה גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה. סכום ארבעת הגבהים של התיבה גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.
- מצא את מידות מלבן הבסיס של התיבה.
 - חשב את שטח המעטפת של התיבה.
 - חשב את נפח התיבה.



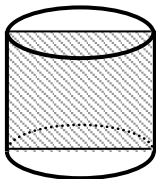
- (4) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ. גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן. הניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב הקטן.
- חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.
 - חשב את נפח המנסרה.



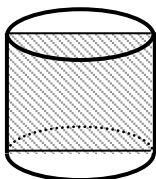
- (5) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית. הניצב הגדול, גדול ב-4 ס"מ מהניצב קטן, וקטן ב-4 ס"מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ"ק.
- מצא את מידות משולש הבסיס.
 - מצא את גובה המנסרה.
 - מצא את שטח המעטפת של המנסרה.



- (6) נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים. ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה. כמו כן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב-4 ס"מ מאורך הבסיס במשולש זה. אורך גובה המנסרה הוא 4 ס"מ.
- מצא את מידות משולש הבסיס.
 - מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?
 - מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?



- (7) שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ"ר. רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $2h - 3r = 1$.
- מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
 - חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
 - חשב את נפח הגליל.



- (8) נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס"מ. מעבירים חתך צירי בגליל. ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.
- ענה על השאלות הבאות:
 - מצא את גובה הגליל.
 - איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?
 - חשב את שטח הפנים של הגליל.
 - חשב את נפח הגליל.

תשובות סופיות:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------|-------------------|
| 1) א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ. | ב. $V = 1152$. | ג. 26 ס"מ. |
| 2) א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ. | ב. $\sqrt{165} = 12.84$ ס"מ. | |
| 3) א. $8 \times 12 \times 18$ ס"מ. | ב. $S = 720$. | ג. $V = 1728$. |
| 4) א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ. | ב. $V = 480$. | |
| 5) א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ. | ב. 30 ס"מ. | ג. $S = 1440$. |
| 6) א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ. | ב. $S = 224$. | ג. 124 ס"מ. |
| 7) א. $r = 3, h = 5$. | ב. $S = 9\pi$. | ג. $V = 45\pi$. |
| 8) א. i. 8 ס"מ. | א.ii. ריבוע. | ב. $S = 96\pi$. |
| | | ג. $V = 128\pi$. |